Apprendre son cours: applications linéaires et matrices

Dans cette feuille, on munit chaque espace de sa base canonique, sauf mention du contraire.

1) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \to (x+2y, x-y, 3x) \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire.

Ecrire la matrice de cette application.

2) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right) \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire.

Ecrire la matrice de cette application. Montrer que c'est un projecteur.

3) Soit $\varphi : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) \\ A \to {}^tA \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire.

Ecrire la matrice de cette application.

4) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \to (P(0), P(1), P(2)) \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire.

Ecrire la matrice de cette application. Est-elle bijective?

5) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \to x+y+2z \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire.

Ecrire la matrice de cette application.

6) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ x \to (x, 2x, 3x) \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire.

Ecrire la matrice de cette application.

7) Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \to P' \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire.

Ecrire la matrice de cette application. Est-elle bijective?

8) Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Soit $\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \to (X-a)P' \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire ( vous pouvez vérifier pour être certain que vous savez faire…)

a) Ecrire la matrice de cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Ecrire la matrice de cette application dans la base $B = \left((X-a)^k, 0 \le k \le 3\right)$
c) $\varphi_a$ est -il un isomorphisme?

9) Soit $\theta$ l'application qui à tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_4[X]$ associe son reste dans la division euclidienne de $P$ par $X^2-1$. Montrer que $\theta$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$. Ecrire sa matrice.

10) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\varphi_P : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) \\ A \to PA \end{cases}$. On admet que $\varphi$ est une application linéaire.

Ecrire la matrice de cette application.
Déterminer l'image et le noyau de $\varphi_P$.

11) L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice dans la base canonique $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Déterminer le rang de f.

12) Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que Im(f) = Ker(f) : on donnera sa matrice.

13) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans base canonique est $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que f est un projecteur ; déterminer son image et son noyau.

14) Soit $\varphi$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans base canonique $(e_1,e_2,e_3)$ est $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; écrire la matrice de $\varphi$ dans base $(e_1+e_2,e_2,e_1-e_3)$ .

15) Soit $\varphi:\begin{cases} \mathbb{C}\to M_2(\mathbb{R}) \\ a+ib \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{cases}$ .

a) Montrer que $\varphi$ est une application linéaire , est-elle injective? bijective?
b) Déterminer la matrice de $\varphi$ . (bases canoniques)
c) Montrer que $\forall (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\quad \varphi(z_1z_2)=\varphi(z_1)\varphi(z_2)$
d) En déduire pour tout $n\in\mathbb{Z}$ la valeur de $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$ .

16) Soit $\varphi$ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}$ où $P^{(k)}$ est la dérivée k-ème du polynôme *P*

a) Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
b) Ecrire la matrice de $\varphi$ dans la base canonique.
c) Ecrire un script Scilab qui demande un entier n et affiche la matrice de $\varphi$.
d) Montrer que $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
e) Pour tout polynôme *P*, calculer $\varphi(P-P')$.
f) En déduire l'application $\varphi^{-1}$ et donner sa matrice dans la base canonique.

17) Soit n un entier $\geq 3$. soit $\varphi$ l' endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A=(a_{i,j})$ avec $a_{1,j}=a_{n,j}=a_{i,1}=a_{i,n}=1$ et $a_{i,j}=0$ si $2\leq i\leq n-1$ et $2\leq j\leq n-1$. ( des 1 tout autour et des 0 à l'intérieur).

a) Calculer $A^2$, déterminer le rang de $\varphi$ et celui de $\varphi^2$.
b) Montrer que Ker$\varphi$ =Ker $\varphi^2$.
c) Montrer que $\mathbb{R}^n=$ Ker$\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$ .

Correction:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. $A^2=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \neq A$, donc $\varphi\circ\varphi\neq\varphi$ : ce n'est pas un projecteur ( sorry)

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible car si on fait $L_2 \leftarrow L_2 - 1/4\, L_3$, on a une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale, qui est donc inversible.

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; $\varphi$ n'est pas bijective car A n'est pas inversible ( matrice triangulaire avec au moins un 0 sur la diagonale)

8) a) Dans la base canonique : $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) dans la base B : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) non car ces deux matrices sont clairement non inversibles (il y a une zéro sur la diagonale).

9) Définition de la division euclidienne par $X^2-1$ : soit P un polynôme: il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tels que $P=(X^2-1)Q+R$ et $\deg(R)<2$ .

Montrons que l'application $\theta$ est linéaire:
soient deux polynômes $P_1, P_2$ :
on a $P_1 = (X^2-1)Q_1 + R_1$ et $\deg(R_1) < 2$ .et $P_2 = (X^2-1)Q_2 + R_2$ et $\deg(R_2) < 2$ .
Par définition de $\theta$ , on a $\theta(P_1) = R_1$ et $\theta(P_2) = R_2$
En sommant on obtient : $\alpha P_1 + P_2 = (X^2-1)(\alpha Q_1 + Q_2) + \alpha R_1 + R_2$ ; comme
$\deg(\alpha R_1 + R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < 2$ , ceci est bien l'écriture de la division euclidienne par $X^2-1$ du polynôme $\alpha P_1 + P_2$ et donc $\theta(\alpha P_1 + P_2) = \alpha R_1 + R_2 = \alpha\theta(P_1) + \theta(P_2)$ : $\theta$ est linéaire.
Par ailleurs $\theta(P) = R \in \mathbb{R}_4[X]$ , donc $\theta$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
Cherchons sa matrice dans la base canonique:
$1 = (X^2-1)0 + 1$ donc $\theta(1) = 1$
$X = (X^2-1)0 + X$ donc $\theta(X) = X$
$X^2 = (X^2-1)1 + 1$ donc $\theta(X^2) = 1$
$X^3 = (X^2-1)X + X$ donc $\theta(X^2) = X$
$X^4 = (X^2-1)(X^2+1) + 1$ donc $\theta(X^4) = 1$

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10) $\varphi_P(E_{1,1}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,1}$; $\varphi_P(E_{1,2}) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,2}$

$\varphi_P(E_{2,1}) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,1}$ ET $\varphi_P(E_{2,2}) = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,2}$

Finalement la matrice de $\varphi_P$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On sait que $\operatorname{Im}(\varphi_P) = Vect(\varphi_P(E_{1,1}), \varphi_P(E_{1,2}), \varphi_P(E_{2,1}), \varphi_P(E_{2,1})) = Vect(E_{1,1} + E_{2,1}, E_{1,2} + E_{2,2})$
Ces deux matrices sont non colinéaires donc forment une famille libre; on a donc une base de $\operatorname{Im}(\varphi_P)$, qui est donc de dimension 2. Puisque la dimension de $M_2(\mathbb{R})$ est 4, par le théorème du rang, on sait que dim Ker($\varphi_P$)=2; et d'après les calculs ci-dessus, $\varphi_P(E_{1,1} - E_{2,1}) = 0_E$ et $\varphi_P(E_{1,2} - E_{2,2}) = 0_E$. On a donc trouvé deux vecteurs de Ker($\varphi_P$), et comme ils sont non colinéaires, ils forment une famille libre, donc une base de Ker($\varphi_P$).

11) rg(A) $=_{L_1\leftarrow L_1/2, L_3\leftarrow L_3/-2} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{L_2\leftarrow L_2+L_1} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ car les 2 dernières lignes sont égales.

12) Soit $(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ; $f(e_1)=ae_1+be_2\neq 0_E$ et $f(e_2)=\alpha f(e_1)$ car d'après le théorème du rang, Ker f et Im f sont tous deux de dimension 1.
De plus $f(e_1)\in Ker(f)$ donc $a(ae_1+be_2)+b\alpha(ae_1+be_2)=0_E=a(a+b\alpha)e_1+b(a+b\alpha)e_2$
Comme $(e_1,e_2)$ est libre on a $a(a+b\alpha)=b(a+b\alpha)=0$ et comme a et b ne sont pas tous les deux nuls (sinon f serait l 'endomorphisme nul et son image et son noyau seraient distincts) alors $a+b\alpha=0$ ; choisissons par exemple $a=b=1$ et $\alpha=-1$
La matrice de f est $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; on a Im f = Ker f = $Vect(e_1+e_2)$

Bon si on est inspiré, on peut directement sortir cette matrice !

13) On calcule et on trouve $A^2=A$ ce qui prouve f projecteur. On sait que $\operatorname{Im} f = Vect(f(e_1),f(e_2),f(e_3)) = Vect(f(e_1)) = Vect((1,0,-1))$ puisque $f(e_2)=0$ et $f(e_3)=-f(e_1)$.
On sait donc que ter f est de dimension 2, or il est clair que $f(e_2)=f(e_1+e_3)=0_E$ et ces deux vecteurs forment une famille libre donc Ker $(f)=Vect(e_2,e_1+e_3)=Vect((1,0,1),(0,1,0))$.
f est donc la projection sur Im f parallèlement à Ker f.

14) On a $\varphi(e_1+e_2)=\varphi(e_1)+\varphi(e_2)=e_1+5e_2-e_3+2e_1+2e_2=3e_1+7e_2-e_3$ et on doit trouver les coordonnées de ceci dans la base $(e_1+e_2,e_2,e_1-e_3)$ c'est à dire trouver $(a,b,c)$ tels que $3e_1+7e_2-e_3=a(e_1+e_2)+be_2+c(e_1-e_3)=(a+c)e_1+(a+b)e_2-ce_3$ ; comme $(e_1,e_2,e_3)$ est une base on peut identifier les coefficients et on a : $a+c=3;a+b=7;c=1$, finalement $a=2,b=5,c=1$.
Ceci nous donne la première colonne de la matrice cherchée; on fait de même avec les autres et on obtient $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

15) a) Prenons $a,b,a',b',\alpha$ des réels:
$$\varphi(a+ib+a'+ib')=\varphi(a+a'+i(b+b'))=\begin{pmatrix} a+a' & -(b+b') \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}=\varphi(a+ib)+\varphi(a'+ib')$$
et $\varphi(\alpha(a+ib))=\varphi(\alpha a+i\alpha b)=\begin{pmatrix} \alpha a & -\alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\alpha\varphi(a+ib)$
On a ainsi prouvé que $\varphi$ est linéaire.
Cherchons son noyau $\varphi(a+ib)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=0_{M_2(\mathbb{R})}\Leftrightarrow a=b=0$ donc $Ker(\varphi)=\{0_{\mathbb{C}}\}$ et $\varphi$ est injective.
Elle ne peut pas être bijective car dim $\mathbb{C}$ =2 et dim $M_2(\mathbb{R})$ =4.
La base canonique de $\mathbb{C}$ est $(1,i)$ ; $\varphi(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E_{1,1}+E_{2,2}$ et $\varphi(i)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=E_{2,1}+E_{1,2}$.

On obtient donc : Mat $\varphi=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

c) Posons $z_1=a+ib$, $z_2=a'+ib'$ ; $z_1z_2=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$, donc

$\varphi(z_1z_2)=\begin{pmatrix}aa'-bb'&-ab'-ba'\\ab'+ba'&aa'-bb'\end{pmatrix}$ et $\varphi(z_1)\varphi(z_2)=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&-b'\\b'&a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'-bb'&-ab'-ba'\\ab'+ba'&aa'-bb'\end{pmatrix}$

Ces deux matrices sont bien égales

d) On obtient donc $\varphi(z^2)=(\varphi(z))^2$ et par récurrence immédiate : $\varphi(z^n)=(\varphi(z))^n$ ( $n\in\mathbb{N}$ )

On pose $z=\cos\theta+i\sin\theta$ on demande donc la valeur de $(\varphi(z))^n$.

Or d'après la formule de Moivre on a $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ et $\varphi(z^n)=(\varphi(z))^n$ donc

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$$

Reste les puissances négatives: $\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\quad\varphi(z_1z_2)=\varphi(z_1)\varphi(z_2)$ donc pour $z\neq0$ on a

$$\varphi\left(z\frac{1}{z}\right)=\varphi(z)\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi(1)=I_2\quad\text{et}\quad\frac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta=e^{-i\theta}\ .$$

On a donc $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta)&-\sin(-\theta)\\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)\end{pmatrix}$ et on a la puissance n en prenant le

résultat précédent et remplaçant $\theta$ par $-\theta$ :

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-n}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta)&-\sin(-\theta)\\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos(-n\theta)&-\sin(-n\theta)\\\sin(-n\theta)&\cos(-n\theta)\end{pmatrix}$$

Finalement $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

16) a) On sait que $P^{(k)}$ est un polynôme de degré $\leq\deg(P)$ donc $\varphi(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs $\varphi$ est linéaire puisque la dérivation l'est.

b) Calculons pour $k\in[\![0,n]\!]$

$$\varphi(X^k)=X^k+kX^{k-1}+k(k-1)X^{k-2}+k(k-1)(k-2)X^{k-3}...+k!=\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}X^i$$

D'où la matrice: $A=(a_{i,j})$ avec $a_{i,j}=\dfrac{j!}{i!}$ si $i\leq j$ et 0 sinon (c'est donc une matrice triangulaire supérieure).

c)
```
n=input('donner n')
A=zeros(n+1,n+1)
for i=1:n+1
   for j=i:n+1
      A(i,j)=factorial(j)/factorial(i)
end
end
disp(A)
```

donner n6

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 6. | 24. | 120. | 720. | 5040. |
| 0. | 1. | 3. | 12. | 60. | 360. | 2520. |
| 0. | 0. | 1. | 4. | 20. | 120. | 840. |
| 0. | 0. | 0. | 1. | 5. | 30. | 210. |
| 0. | 0. | 0. | 0. | 1. | 6. | 42. |
| 0. | 0. | 0. | 0. | 0. | 1. | 7. |
| 0. | 0. | 0. | 0. | 0. | 0. | 1. |

d) Les termes de la diagonales sont tous égaux à 1, la matrice est donc inversible.

e) $\varphi(P-P')=\varphi(P)-\varphi(P')=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}-\sum_{k=0}^{n}P^{(k+1)}=P^{(0)}-P^{(n+1)}=P$ car $P^{(n+1)}=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Donc si on note $\psi$ l'application définie par $\psi(P)=P-P'$, on a $\varphi\circ\psi=Id_{\mathbb{R}[X]}$. $\varphi$ est donc inversible et son inverse est $\psi$ .

On a $\psi(X^k)=X^k-kX^{k-1}$ donc $\psi$ a pour matrice: $B=(b_{i,j})$ avec $b_{i,i}=1$ , $b_{i,i+1}=-i$ et $b_{i,j}=0$ si $j\notin\{i,i+1\}$.

17) a) Quand on calcule $A^2$ on obtient une matrice qui a des 2 partout sauf aux quatre coins où le terme vaut n.
Pour n=6:
A =

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. |
| 1. | 0. | 0. | 0. | 0. | 1. |
| 1. | 0. | 0. | 0. | 0. | 1. |
| 1. | 0. | 0. | 0. | 0. | 1. |
| 1. | 0. | 0. | 0. | 0. | 1. |
| 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. |

A^2=

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6. | 2. | 2. | 2. | 2. | 6. |
| 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| 2. | 2. | 2. | 2. | 2. | 2. |
| 6. | 2. | 2. | 2. | 2. | 6. |

Quand on regarde la matrice A , il n'y a que deux colonnes distinctes et non proportionnelles ( toutes les colonnes sont égales soit à $C_1$ soit à $C_2$) . Donc la dim de Im $\varphi$ est 2.

Même chose pour $\varphi^2$ de matrice $A^2$ .

b) D'après le théorème du rang, Ker $\varphi$ et Ker $\varphi^2$ sont donc tous deux de dim n - 2. Or $Ker(\varphi)\subset Ker(\varphi^2)$ et finalement $Ker(\varphi)=Ker(\varphi^2)$.

c) Soit $x\in Ker(\varphi)\cap\mathrm{Im}(\varphi)$ ; il existe y tel que $x=\varphi(y)$ et

$\varphi(x)=0_E\Rightarrow\varphi^2(y)=0_E\Rightarrow y\in Ker(\varphi^2)\Rightarrow y\in Ker(\varphi)\Rightarrow x=\varphi(y)=0_E$

Finalement $Ker(\varphi)\cap\mathrm{Im}(\varphi)=\{0_E\}$ ; le théorème du rang permet de conclure que $\mathbb{R}^n=$ Ker$\varphi\oplus\mathrm{Im}\varphi$ .